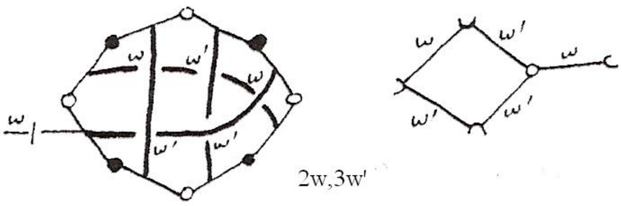
le *soliton nœudien*

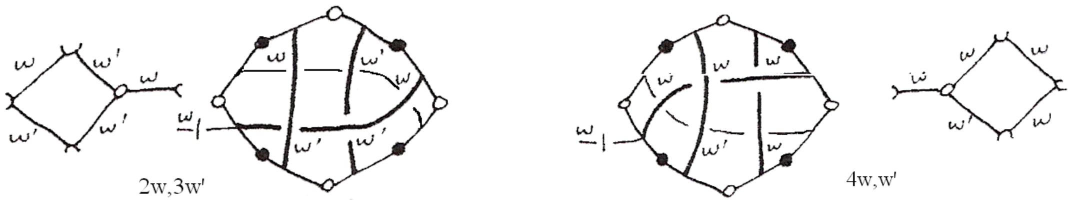
<u>1ère partie</u> : *indiscernabilité des chemins parcourus par les métamorphoses*

il est loisible de considérer le coin retournable comme le départ d'une "*onde*" de métamorphoses.

regardons ce qui se passe avec un motif fait d'un antibrin *retournant* à trois croisements, dans un poinçon octogonal. un croisement extérieur sert de référent aux ornures du motif. à côté du motif poinçonné est dessiné son graphe des sommets vides.

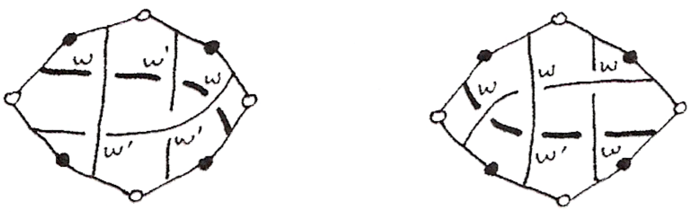


le mouvement qui s'observe des deux motifs liés par métamorphose régulière



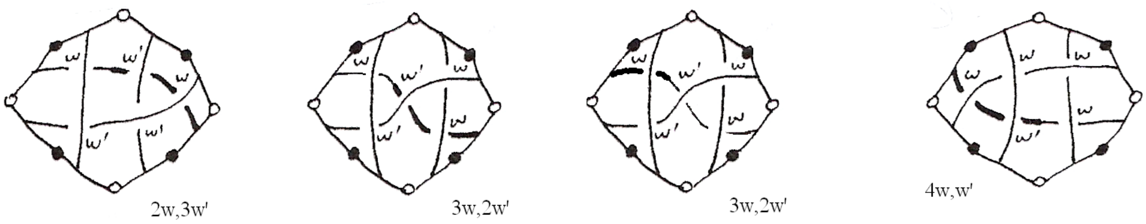
peut être considéré de deux manières :

a — comme l'unique retournement, *d'un seul geste*, de l'épingle **w'w'**



par l'antibrin ***ww'w***;

b — comme une séquence de deux retournements de coins, *en trois*



gestes, le deuxième coin retournable apparaissant après effectuation et abandon du premier retournement.

pour le regard, les états initiaux de **a** et **b** s'équivalent ainsi que leurs états finaux, et de fait il est impossible de décider quel mouvement a primé pour passer d'un poinçon extrême à son symétrique ce qui incite, par facilité de langage, à parler de la *double nature* du processus.

les identités qui décrivent les passages de gauche à droite d'un motif à l'autre s'écrivent

— selon **a**, l'antibrin *retournant* étant noté ***2ww'*** = (***2,1***) et l'épingle retournable **2w'** = (0,2), le calcul des ornures, qui est une simple addition, est (***2,1***) **+** (0,2) devient par le retournement ***r*** , (2,0) **+** (***2,1***) soit dans l'écriture contractée de la formule fonctionnelle des crochets :

$$\boxed{\boldsymbol{r}\ \langle \boldsymbol{2,1}/0,2\rangle = \langle 2,0/\boldsymbol{2,1}\rangle}$$

qui pourrait se lire : le retournement d'un crochet retournable - c'est-à-dire un crochet qui s'écrit dans l'ordre "*cro retournant chet retournable*" — est un crochet retourné — c'est-à-dire un crochet qui s'écrit dans l'ordre "cro retourné chet retournant".

le croisement retournable (0,2) soit **2w'** est retourné en **2w** soit (2,0), l'épingle *retournante* restant inva-riante. le calcul du résultat s'écrit (2,0) + (***2,1***).

nous voyons que le retournement s'interprète en cette formule comme une double commutation — ou mieux comme **torsion** de l'écriture — : la première, des places respectives de l'*épingle retournante* et du motif re-tournable, la seconde des valeurs des ornures du motif retournable, l'*épingle retournante* restant inva-riante. nous avons, ici (2,0) + (***2,1***) = **4w** + **w'**, là (***2,1***) + (0,2) = **2w** + **3w'**.

l'involution du retournement se montre par l'adjonction de la formule fonctionnelle inverse :

r<***2,1***/2,0> = <0,2/***2,1***>

nous écrivons la séquence complète de l'involution en partant de <***2,1***/0,2> :

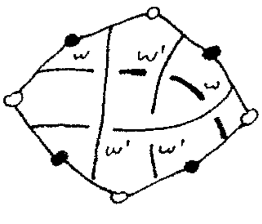
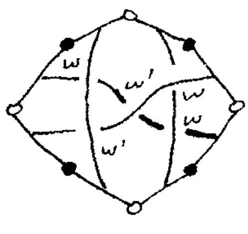
α) ***r***<***2,1***/0,2> = <2,0/***2,1***> *transposition du résultat symbolisée par* ➩, *pour le retournement* <2,0/***2,1***> ➩ <***2,1***/2,0> puis
β) ***r***<***2,1***/2,0> = <0,2/***2,1***> *transposition du résultat pour le retournement* <0,2/***2,1***> ➩ <***2,1***/0,2> ce qui est bien la configuration de départ.

ce qui se lit en calcul : partant de (***2w+w'***) + (0w+2w') = (***2,1***) + (0,2) = 2w + 3w' = (2,3)

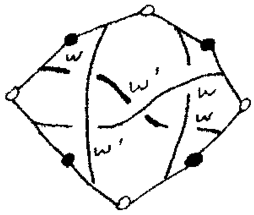
α) ***r***(2,3) = (4,1) = 4w + w' = (2,0) + (***2,1***) = (2w+0w') + (***2w+w'***) *transposition du résultat pour le retournement* (2,0) + (***2,1***) ➩ (***2,1***) + (2,0) = (***2w+w'***) + (2w+0w') puis
β) ***r***(4,1) = (2,3) = 2w + 3w' = (0,2) + (***2,1***) = (0w+2w') + (***2w+w'***) *transposition du résultat pour le retournement* (0,2) + (***2,1***) ➩ (***2,1***) + (0,2) ce qui est bien la valeur de départ.

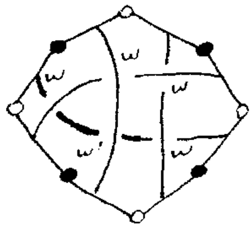
la métamorphose étant régulière, la somme des coefficients des ornures demeure invariante.

— selon **b**, le premier coin retournable est retourné en le premier coin du milieu qui lui succède.

abandonnons ce coin retourné et glissons sur celui qui le jouxte avec lequel il partage un croisement **w'** commun.





les valeurs de ce coin sont (***1,1***) + (0,1), ce qui donne par retournement ***r***<***1,1***/0,1> = <1,0/***1,1***>. la confi-guration globale de départ était **2w3w'**, c’est-à-dire (w+2w') pour le coin retournable à quoi s' ajoutent les valeurs de l'épingle non alternée (w + w') du reste du motif, nous sommes passés par la configuration intermédiaire **3w2w'**, valeurs du coin retourné (2w+w') auxquelles s'ajoutent celles de l'épingle (w,w') qui n'est pas intervenue dans la métamorphose, pour déboucher sur **4ww'** = (4,1).

nous pouvons donc écrire le cheminement que suivent les retournements successifs. de <***1,1***/0,1> = (1,2) on écrit ***r***<***1,1***/0,1> = <1,0/***1,1***> soit **2ww'** = (2,1), ce qui s'analyse ainsi :

les deux **w** forment l'épingle alternée résiduelle **2w** = (2,0) qui ne participera pas à l'autre métamorphose et dont nous figeons le compte qui s'additionnera ainsi au résultat du prochain retournement, tandis que le croisement **w'** participe au nouveau retournement soit comme croisement de la nouvelle *épingle re-tournante **ww'***, soit comme croisement retournable; dans les deux cas lors du retournement il s'annihi-lera et apparaîtra un croisement **w** selon ***r***<***1,1***/0,1> = <1,0/***1,1***>. au final, le trajet des métamorphoses est, avec le symbole ➥ utilisé pour signifier la translation d'un coin à son voisin et les indices **x** et **y** indiquant sur quelles parts du motif global portent les opérations

r<***1,1***/0,1>$_{\mathbf{x}}$ + (1,1)$_{\mathbf{y}}$ = <1,0/***1,1***>$_{\mathbf{x}}$ + (1,1)$_{\mathbf{y}}$ ➥ ***r***<***1,1***/0,1>$_{\mathbf{y}}$ + (2,0)$_{\mathbf{x}}$ = <1,0/***1,1***>$_{\mathbf{y}}$ + (2,0)$_{\mathbf{x}}$

le comptage s'effectue ainsi :

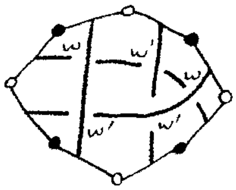
– **avant** retournement du coin ***x***, le calcul donne ***w*** de $(\boldsymbol{1,1})_x$ + w de $(1,1)_y$ soient 2w et ***w'*** de $(\boldsymbol{1,1})_x$ + w' de $(0,1)_x$ + w' de $(1,1)_y$ soient 3w'. (2w+3w') = (2,3).
– **après** retournement du coin ***x*** le calcul, **vu de *x***, donne w de $(1,0)_x$ + ***w*** de $(\boldsymbol{1,1})_x$ + w de $(1,1)_y$ soient 3w et ***w'*** de $(\boldsymbol{1,1})_x$ + w' de $(1,1)_y$ soient 2w'. (3w+2w') = (3,2).
– *après la translation* et **avant** retournement du coin ***y*** le comptage, **vu maintenant du coin *,y*** donne ***w*** de $(\boldsymbol{1,1})_y$ + 2w de $(2,0)_x$ = 3w et ***w'*** de $(\boldsymbol{1,1})_y$ + w' de $(0,1)_y$ = (3w+2w') = (3,2). le compte est, naturelle-ment, le même qu'avant *la translation,* mais le **référentiel** du comptage a changé.
– **après** retournement du coin ***y*** le calcul donne w de $(1,0)_y$ + ***w*** de $(\boldsymbol{1,1})_y$ + 2w de $(2,0)_x$ et ***w'*** de$(\boldsymbol{1,1})_y$ soit au total (4,1).

c'est la série infinie des séquences telles celle du coin retournable qui initialise le processus, suivie de celle des trois poinçons octogonaux que nous avons étudiée, suivie de séquences dont nous étudierons le montage et le comportement plus loin, que nous appelons ***soliton*** *nœudien*.

<u>2ème partie</u> : *valeur ornée chromodynamique des motifs*

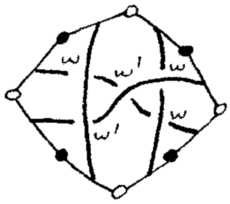
reprenons nos trois poinçons avec leur contenu.
nous pouvons leur associer une fonction d'ornures en sommant les ornures pour chacun des motifs, et en égalisant cette somme à une valeur arbitraire sans signification immédiate. nous obtenons :

I



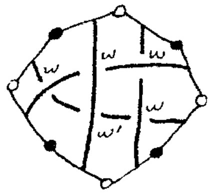
2w + 3w' = k

II



3w + 2w' = k'

III



4w + w' = k"

ces trois états sont donc représentés par un système de trois égalités linéaires.

$$2w + 3w' = k \quad \text{pour l'état } \mathbf{I}$$
$$3w + 2w' = k' \quad \text{pour l'état } \mathbf{II}$$
$$4w + w' = k'' \quad \text{pour l'état } \mathbf{III}.$$

scindons ce système en deux sous-systèmes (**I**, **II**) et (**II**, **III**) pour étudier ce qui se passe entre deux états liés, les états **I** et **II**, et les états **II** et **III**.

a – le sous-système (**I**, **II**) est

$$2w + 3w' = k \quad (1a)$$
$$3w + 2w' = k' \quad (2a)$$

pour lequel les solutions sont :

$$\mathbf{w} = (3k' – 2k)/5$$
$$\mathbf{w'} = (3k – 2k')/5$$

b – pour le second sous-système

$$3w + 2\,w' = k' \quad (1b)$$
$$4w + w' = k'' \quad (2b)$$

la même procédure donne

$$\mathbf{w} = (2k'' – k')/5$$
$$\mathbf{w'} = (4k' – 3k'')/5$$

en égalisant les valeurs des numérateurs **w** des deux sous-systèmes (**I**, **II**) et (**II**, **III**),

$$3k' – 2k = 2k'' – k'$$

ou celles des **w'** $\quad 3k – 2k' = 4k' – 3k''$

nous obtenons les valeurs des paramètres arbitraires {k, k', k''} données par une égalité intrinsèque circu-laire, c'est-à-dire qu'une quelconque des trois donne les deux autres, et les valeurs de **w** et de **w'** indépendantes de l'état et valables pour tout le système (**I**, **II**, **III**).

$$\boxed{\mathbf{k - 2k' + k'' = 0}}$$

et les trois identités qui s'en déduisent, que nous listons :

$$k = 2k' - k''$$
$$k' = (k + k'')/2$$
$$k'' = 2k' - k$$

on voit que k' est la moyenne de k et k'' qui sont mutuellement commutants.

le **paramétrage** de **w** et **w'** fait apparaître ces trois paramètres {**k**, **k'**, **k''**} dans les formules de **w** et **w'**. voici comme il faut procéder : nous partons de la formule de l'un des trois paramètres, **k**, par exemple, et écrivons de combien elle diffère de la valeur du numérateur de $\mathbf{w}_{I,II} = 3k' - 2k$, ce qui revient à écrire tautologiquement l'identité $\mathbf{w}_{I,II} = \mathbf{k} + (w_{I,II} - k)$ soit

$$3k' - 2k = (\mathbf{2k' - k''}) - 2k + k' + k'' = \mathbf{k} - 2k + k' + k'' = -\mathit{k} + \mathit{k'} + \mathit{k''}$$

de même pour le numérateur de $\mathbf{w'}_{I,II} = 3k - 2k'$ pour lequel $\mathbf{w'}_{I,II} = \mathbf{k} + (\mathbf{w'}_{I,II} - k)$ soit

$$3k - 2k' = (\mathbf{2k' - k''}) + 3k - 4k' + k'' = \mathbf{k} + 3k - 4k' + k'' = \mathit{4k} - \mathit{4k'} + \mathit{k''}$$

ces valeurs, fonctions du triplet (**k**, **k'**, **k''**), de **w** et **w'** sont donc réécrites ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathbf{w} = (-\,\mathbf{k} + \mathbf{k'} + \mathbf{k''})/5 \\ \mathbf{w'} = (\mathbf{4k} - \mathbf{4k'} + \mathbf{k''})/5\end{array}}$$

ces écritures ne sont d'ailleurs pas uniques mais elles sont simples.

voici le tableau complet des paramétrages de **w** et **w'**, dont nous ne retenons que le numérateur, que nous écrirons avec le paramètre en indice, $\mathbf{w}_k$ et $\mathbf{w'}_k$, et en assimilant chaque ornure à une matrice carrée 3 × 3 produit d'une matrice unicolonne **K** = (**k**, **k'**, **k"**) par une matrice uniligne **N** = (n_1, n_2, n_3), dont tous les coefficients sont nuls hormis ceux de la diagonale principale qui peuvent être nuls ou non nuls

$$\begin{vmatrix} k \\ k' \\ k'' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n_1k & 0 & 0 \\ 0 & n_2k' & 0 \\ 0 & 0 & n_3k'' \end{vmatrix}$$

soit sous forme simplifiée et en n'écrivant que les coefficients n_i :

- paramétrage du sous-système (**I, II**)

$\mathbf{w}_k$ = $\mathbf{w}_{k''}$	(– 1, + 1, + 1)	$\mathbf{w'}_k$ = $\mathbf{w'}_{k''}$	(+ 4, – 4, + 1)
$\mathbf{w}_{k'}$	(– 5/2, + 4, – 1/2)	$\mathbf{w'}_{k'}$	(+ 5/2, – 1, – 1/2)

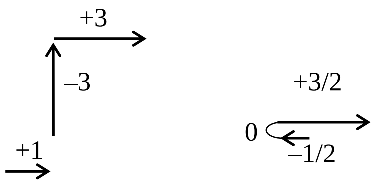
ce qui se représente géométriquement

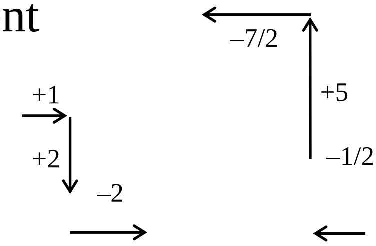
représentation des **w** : en (**a**) $\mathbf{w}_{\mathbf{k,k''}}$; en (**b**) $\mathbf{w}_{\mathbf{k'}}$ représentation des **w'** : en (**a**) $\mathbf{w'}_{\mathbf{k,k''}}$; en (**b**) $\mathbf{w}_{\mathbf{k'}}$

- paramétrage du sous-système (**II, III**)

$\mathbf{w}_k$ = $\mathbf{w}_{k''}$	(+ 1, – 3, + 3)	$\mathbf{w'}_k$ = $\mathbf{w'}_{k''}$	(+ 1, + 2, – 2)
$\mathbf{w}_{k'}$	(– 1/2, 0, + 3/2)	$\mathbf{w'}_{k'}$	(– 1/2, + 5, – 7/2)

ce qui se représente géométriquement





représentation des **w** : en (**a**) $\mathbf{w}_{\mathbf{k},\mathbf{k}''}$; en (**b**) $\mathbf{w}_{\mathbf{k}'}$ représentation des **w'** : en (**a**) $\mathbf{w}'_{\mathbf{k},\mathbf{k}''}$; en (**b**) $\mathbf{w}'_{\mathbf{k}'}$

ces paramétrages, rappelons-le, étant tous équivalents. la somme des coefficients des paramétrages vaut toujours +1, ce qui fournit un critère de contrôle.

si maintenant nous choisissons des valeurs numériques pour deux des paramètres du triplet (k, k', k"), tou-tes les valeurs du triplet ainsi que celles des **w** et **w'** sont complètement déterminées.

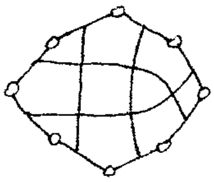
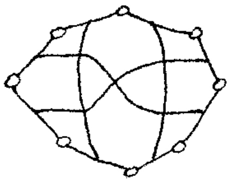
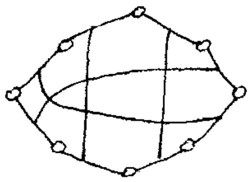
<u>1ère</u> <u>partie</u> <u>–</u> <u>(suite)</u> **:** ***propagation de l'onde de métamorphoses* ou *soliton nœudien***

dans la première partie nous avons supposé connu le retournement du coin. nous avons initié l'*onde* de métamorphoses, que nous appellerons désormais ***soliton*** *nœudien* du fait de la ressemblance de cette suite de retournements — que nous avons choisie nécessairement **indiscernable** d'avec le retournement par l'antibrin multiple — avec des manifestations du phénomène physique du même nom.

nous avons commencé, ici, à aborder le motif à 5 croisements dans un poinçon octogonal. si nous voulons constituer la série du ***soliton*** à nombre croissant de croisements à partir du coin retournable, les égali-tés circulaires suivantes sont utiles pour la construction rapide du ***soliton*** désiré dans lesquelles **c** est le nombre de croisements du motif considéré, **é** le nombre des épingles, **a** le nombre des arêtes du poinçon et **p** le nombre de poinçons formant une séquence

$$\mathbf{a} = \mathbf{c} + 3 = 2\mathbf{é} + 4 \;//\; \mathbf{p} = (\mathbf{c}+1)/2 = \mathbf{é}+1 = \mathbf{a}/2 - 1 \;//\; \mathbf{é} = \mathbf{a}/2 - 2 = (\mathbf{c} - 1)/2 \;//\; \mathbf{c} = \mathbf{a} - 3 = 2\mathbf{é} + 1$$

le motif que nous avons présenté était à 5 croisements, 2 épingles, 3 poinçons à 8 arêtes.

la série infinie des séquences du ***soliton*** *nœudien* commence à 3 croisements, le coin, dans un poinçon he-xagonal. d'un poinçon à son successeur dans la série on ajoute une épingle alternée ou non c’est-à-dire 2 croisements supplémentaires et 2 arêtes au poinçon. ainsi l'on "gonfle" indéfiniment le poinçon par l'adjonction d'épingles alternées ou non **ne détruisant pas l'antibrin *retournant***, ce qui ne change pas la nature topologique du motif de métamorphose. d'autre part, à chaque séquence on étudie sa fonction d'ornures. d'une séquence à sa suivante, le nombre des métamorphoses, et donc des poinçons, augmen-te de 1. partis de 2 poinçons pour le retournement du coin, soit une métamorphose, nous avons travaillé avec 3 poinçons pour la séquence présentée au début de cette étude représentant 2 métamorphoses.

familiarisé·e·s, nous pouvons systématiser la construction de la série. nous redessinerons la séquence du coin retournable, puis celle obtenue en ajoutant une épingle, alternée ou non, et ainsi de suite.

<u>discussion</u>

— la cellule de base est le coin retournable à laquelle on ajoutera selon le même protocole autant d'épin-gles, alternées ou non alternées, **ne détruisant pas l'antibrin *retournant*** qu'on voudra, selon nos formules de construction. ce coin est **2w** + **w'**, rappelons encore que le choix des ornures est non standard, et s'écrit **2ww'**, et son équation aux valeurs, pour laquelle on a *x***w** + *y***w'** = (x, y), est (2,0) + (0,1) = (2,1).

le coin est formé de trois croisements et on peut le regarder diversement.

– soit on le regarde comme montage d'un croisement et d'une épingle **non alternée**, *retournante* donc, le croisement isolé étant retournable, et le voici **coin retournable**,

– soit on le regarde comme montage d'un croisement et d'une épingle **alternée**, le croisement isolé étant commun aux deux épingles *retournantes*, et le voici ***soliton***.

à strictement parler le coin retournable est un ***soliton*** dégénéré ou encore ***soliton*** trivial, c'est-à-dire qu'il demeure un **oscillateur à deux positions**, ou **oscillateur binaire**, à la fois continu puisque le retournement est une métamorphose topologique glissante, et quantique puisque les deux états du retournement sont discrets, les deux états de la métamorphose régulière qu'il manifeste. le langage formel qu'il représente est l'ensemble infini des mots oscillants de deux lettres $£^* = \{\mathbf{a}^p\mathbf{a}^q\}$ avec p et q de 0 à l'∞. son équation fonctionnelle est $\boldsymbol{r}\langle\boldsymbol{1,1}/0,1\rangle = \langle 1,0/\boldsymbol{1,1}\rangle$ c'est-à-dire en valeurs :

$$\boldsymbol{r}[(2,0) + (0,1)] = \boldsymbol{r}(2,1) = (1,2) = (1,0) + (0,2).$$

le coin retournable est le premier de la série infinie des séquences de propagation du ***soliton***. sa séquence est formée de deux états involutivement retournables.

après la séquence du coin, il vient celle, la première non triviale, que nous avons étudiée ci-dessus, au poinçon octogonal et aux trois états.

sans dessiner outre mesure, nous pouvons déduire les premières valeurs des **w** et **w'** du premier poinçon de chaque nouvelle séquence par la considération suivante : nous connaissons les valeurs du coin retournable (2,1); et soient (x, y) celles de l'épingle ajoutée. cette épingle est alternée ou non alternée.

- si elle est alternée elle est homoornée soit **2w** et alors x = 2 et y = 0, soit **2w'** et x= 0 et y = 2. nous obtenons donc, en additionnant le motif initial et l'épingle ajoutée

$$(2,1) + (2,0) = (4,1), \text{ ou } (2,1) + (0,2) = (2,3).$$

en combinant l'équation fonctionnelle à l'équation aux valeurs, ce qui fournit l'équation mixte, nous écri-rons le cas **2w**

$$\boldsymbol{r}<\boldsymbol{1,1}/0,1> + (2,0) = <1,0/\boldsymbol{1,1}> + (2,0)$$

nous avions (3,2) nous passons à (4,1). le cas **2w'** s'écrit

$$\boldsymbol{r}<\boldsymbol{1,1}/0,1> + (0,2) = <1,0/\boldsymbol{1,1}> + (0,2)$$

nous avions (1,4) nous passons à (2,3).

- si l'épingle n'est pas alternée, elle est hétéroornée et nous obtenons

$$\boldsymbol{r}<\boldsymbol{1,1}/0,1> + (1,1) = <1,0/\boldsymbol{1,1}> + (1,1)$$

nous avions (2,3) et nous passons à (3,2).

remarque encore: l'attribution initiale des ornures n'obéissant à aucun standard les valeurs énoncées sont commutables. ce que nous retenons est le fait qu'une fois une attribution effectuée elle conditionne le reste.

<u>3ème partie</u> : ***formule générale de tous les solitons nœudiens possibles***

avant d'établir les équations générales des ***solitons***, nous raisonnerons sur les deux premières séquences.

l'**oscillateur binaire**, **é** = 1 d'où **a** = 6, **c** = 3 et **p** = 2, a pour valeur (x,y) avec x = 1 si y = 2 et inversement. l'équation aux valeurs est (x,y) = ***(1,1)*** + (a,b), avec les valeurs si a = 1 alors b = 0 et inversement, ce qui donne soit (2,1) soit (1,2). son équation mixte s'écrit, en posant l'absence de croisement (0,0) afin d'homogénéiser l'écriture

$$\boldsymbol{r}[<\boldsymbol{1,1}/a,b> + (0,0) = (1 + a, 1 + b)] = <b,a/\boldsymbol{1,1}> + (0,0) = (1 + b, 1 + a).$$

le premier motif poinçonné du successeur immédiat ne possède donc qu'**une seule** épingle supplémentaire selon les formules de montage du **§1ère partie - suite**. il aura pour équation aux valeurs, la valeur (x,y) du coin initial à laquelle on additionne celle (m,n) de l'épingle ajoutée homo- ou hétéroornée. ce qu'on écrira (x + m, y + n) et qui s'explicite (x + m, y + n) = **ou** (x + 2, y) **ou** (x + 1, y + 1) **ou** (x, y + 2), et dont on peut écrire l'équation mixte de deux manières, en se souvenant des valeurs de a, b, m et n, à savoir : si a = 1, b = 0 et inversement, si m = 2, n = 0 et inversement, si m = 1, n = 1

r[<***1,1***/a,b> + (m,n) = (1 + a + m, 1 + b + n)] = <b,a/***1,1***> + (m,n) = (1 + b + m, 1 + a + n)

ou, en retirant à (x + m) un ***w*** et à (y + n) un ***w'*** afin de constituer l'épingle *retournante*

r<***1,1***/x + m – 1, y + n – 1> = (x + m, y + n)] = <y + n – 1, x + m – 1/***1,1***> = (y + n, x + m).

les valeurs de a, b, m et n nous fournissent les six combinaisons des douze retournements. les premiers de chaque ligne écrits comme retournables, les seconds comme retournés qui, pour respecter notre protocole d'écriture, après *transposition* dont nous parlerons au § suivant, changent de ligne en devenant retournables. nous listons la table de ces combinaisons en les ordonnant par rapport à (a,b), /1,0> puis /0,1>, les trois valeurs de (m,n), (2,0), (1,1) et (0,2); l'*épingle retournante* étant toujours (***1,1***)

a) ***r***[<***1,1***/1,0> + (2,0) = (1+1+2, 1+0+0) = (4,1)] = <0,1/***1,1***> + (2,0) = (1+0+2, 1+1+0) = (3,2)
b) ***r***[<***1,1***/1,0> + (1,1) = (1+1+1, 1+0+1) = (3,2)] = <0,1/***1,1***> + (1,1) = (1+0+1, 1+1+1) = (2,3)
c) ***r***[<***1,1***/1,0> + (0,2) = (1+1+0, 1+0+2) = (2,3)] = <0,1/***1,1***> + (0,2) = (1+0+0, 1+1+2) = (1,4)
d) ***r***[<***1,1***/0,1> + (2,0) = (1+0+2, 1+1+0) = (3,2)] = <1,0/***1,1***> + (2,0) = (1+1+2, 1+0+0) = (4,1)

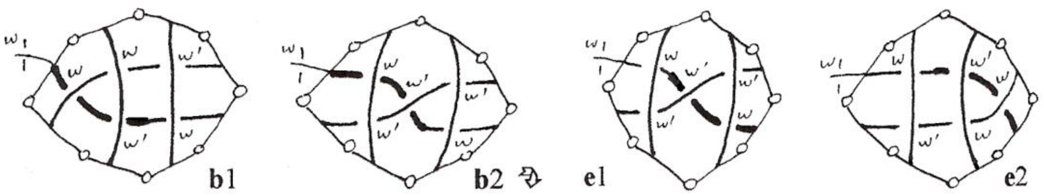
e) ***r***[<***1,1***/0,1> + (1,1) = (1+0+1, 1+1+1) = (2,3)] = <1,0/***1,1***> + (1,1) = (1+1+1, 1+0+1) = (3,2)
f) ***r***[<***1,1***/0,1> + (0,2) = (1+0+0, 1+1+2) = (1,4)] = <1,0/***1,1***> + (0,2) = (1+1+0, 1+0+2) = (2,3)

la table montre les valeurs (u,v) sous forme de **2-sommants** du nombre des croisements; 5 = 1 + 4 =2 + 3 et leurs inverses. ceci détermine le bouclage, c'est-à-dire la répétition, dans une séquence, d'ensembles de valeurs d'ornures. dans notre exemple, 12 états donnent lieu aux 4 ensembles de valeurs.

usage de la table

cette table peut s'utiliser comme un abaque
chaque configuration ci-dessus notée d'une lettre **a**, **b**, etc., est double, puisqu'une ligne complète repré-sente les deux états d'un même retournement, et peut donc se distribuer en deux parts, chacune relative à la valeur obtenue par chaque état; ainsi **a** est **a**1 (4,1) et **a**2 (3,2), **b** est **b**1 (3,2) et **b**2 (2,3), …, **f** est **f**1 (1,4) et **f**2 (2,3).
soit donc la configuration **b**1 dont les valeurs sont (3,2). nous lisons que par retournement nous obtenons **b**2 soit (2,3). mais **b**2 est <0,1/***1,1***> + (1,1). pour retourner **b**2 selon notre protocole il faut donc l'écrire <***1,1***/0,1> ce qui revient à le *transposer* en **e**1 de mêmes valeurs (2,3) et dont le retourné est **e**2 c'est-à-dire ***r***[<***1,1***/0,1> + (1,1)] = <1,0/***1,1***> + (1,1) = (3,2).
b1 a engendré **b**2 **contenant virtuellement et actualisant e**1 qui engendre finalement **e**2. nous traduisons l'énoncé '**contenant virtuellement et actualisant**' par '*se transpose en*', représenté dans nos formules par le symbole . nous écrivons :
le poinçon **b**1 représentant le départ de la séquence du ***soliton***$_5$ à 5 croisements, dont 2 épingles non alter-nées, engendre la séquence **b**1 (3,2) —► **b**2 (2,3) —► **e**2 (3,2). ce que nous dessinons

(*transposé en e1*)



au fur et à mesure de l'élaboration de la série, on opérera à la fois sur le plan "horizontal" des séquences, et "verticalement" sur celui de la série.

la *transposition* organise les douze figures en trois 4-diagrammes retournement/*transposition* lisibles relativement aux trois épingles :

a1 → ***r*** → **a**2   **b**1 → ***r*** → **b**2   **c**1 → ***r*** → **c**2

↑ ↓   ↑ ↓   ↑ ↓

↑ ↓   ↑ ↓   ↑ ↓

d2 ← ***r*** ← **d**1   **e**2 ← ***r*** ← **e**1   **f**2 ← ***r*** ← **f**1

épingle (2,0)   épingle (1,1)   épingle (0,2)

et les ensembles de valeurs se répartissent en quatre séries d'égalités que nous listons avec leurs paramétrages dont le calcul se fait sans difficulté.

a1 = **d**2 = 4w + w' = (4,1) = k''
a2 = **b**1 = **d**1 = **e**2 = (3,2) = k'
b2 = **c**1 = **e**1 = **f**2 = (2,3) = k
c2 = **f**1 = (1,4) = k + k' – k''

souvenons-nous que les valeurs des paramètres sont circulaires, c’est-à-dire qu'il y a plusieurs écritures des résultats. ainsi, puisque k'' = 2k' – k, il est indifférent d'écrire **a**1 = k'' ou **a**1 = 2k' – k, etc. nous optons pour l'écriture la plus simple. nous pouvons aussi utiliser les valeurs dans les calculs de valeurs de la manière suivante (u,v) = (m,n) + (p,q) + (r,s) = (m + p + r) + (n + q + s); prenons (1,4) par exemple : (1,4) = (2,3) + (3,2) – (4,1) = (2+3–4) + (3+2–1), de même (3,2) = [(2,3) + (4,1)]/2, etc.

de plus, les trois 4-diagrammes sont séparés et les valeurs servent de passerelles entre les 1er et 2e d'une part, les 2e et 3e d'autre part. les valeurs (4,1) et (1,4) sont inverses, au bord de leur diagramme respectif et aux extrémités de l'ensemble des 4-diagrammes tandis que les valeurs du diagramme central d'é-pingles (1,1) sont toutes en correspondance avec le diagramme qui leur est adjacent. le diagramme central est donc le passage obligé entre les diagrammes extrêmes. le passage d'un diagramme à l'autre par les valeurs indique une nouvelle répartition des ornures (2,0) puis (1,1) puis (0,2) en en conservant la valeur absolue (**2**); elles nécessitent donc une commutation des valeurs du croisement retournable et une désalternance de l'épingle ajoutée.

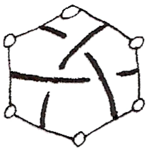
paramétrage des séquences du soliton – à partir du croisement de départ nous ajoutons autant d'épingles que nous voulons prises parmi les trois compatibles. il y a donc, théoriquement, autant de ***solitons*** possibles que d'arrangements avec répétitions, soit $a(3,n) = 3^n$; le coin est l'arrangement pour lequel n = 1, c’est-à-dire qu'il y a bien trois coins retournables possibles pour chacun des deux croisements. nous avons donc deux croisements, six configurations de coins initiaux retournables, etc. ce nombre va t'il jouer un rôle dans le comptage? non! pour la raison que nous connaissons déjà, due à la *transposition*. souvenons-nous du processus : nous effectuons un retournement puis **nous abandonnons le coin retourné** et nous abordons le retournement suivant. tout se passe comme si, au fond, nous *sautions* d'un coin à l'autre c’est-à-dire d'un poinçon hexagonal à un autre poinçon hexagonal, à son suivant.

au départ un ***soliton*** se présente sous la forme d'un croisement **c** $\in \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$ suivi d'un ensemble ***E*** de ***n*** épin-gles compatibles.

ce ***soliton*** parcourra donc **n** retournements pour arriver à l'autre bord du poinçon. le paramétrage devra donc tenir compte de toutes ces étapes.

calcul plastique du *soliton* généralisé

le ***soliton*** généralisé est un motif à un coin retournable et une kyrielle d'épingles alternées ou non alter-nées dont aucune ne détruit l'antibrin



retournant. que voulons-nous dire par là? voici un coin non retournable, autrement dit coincé.

ce coin est formé de trois épingles alternées ayant deux à deux un croisement commun. effectuons une inversion de dessus dessous sur l'un des croisements

on a envie de dire **le coin est devenu retournable**, ce qui s'énonce mieux en disant qu'un nouveau coin est apparu et qu'il est métamorphosable; mais nous aurions tout aussi bien pu construire dès le départ ce coin retournable.

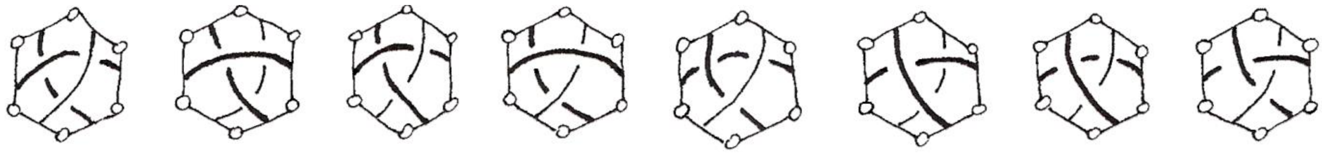
il y a deux croisements – que, sans nous appesantir ici, nous dirons *intuitifs* – inverses possibles que nous étique-tons arbitrairement ***i*** et ***j*** – nommer ainsi ces croisements intuitifs nous évite de leur attribuer une ornure standard.

face à un croisement, il y a quatre épingles possibles que nous étiquetons tout aussi arbitrairement. la *non* alternée ***D***essus est ***D***, la *non* alternée ***d***essous est ***d***, l'alternée **D**essus-**d**essous est **Dd**, la lecture s'effectue de gauche à droite — éventuellement sur des dessins de haut en bas —, et enfin l'alternée **d**essous-**D**essus est **dD**.

D ***d***

Dd **dD**

voici la liste des huit combinaisons croisements/épingles : ***iD***, ***id***, ~~***i*****Dd**~~ et ***i*****dD,** et ***jD***, ***jd***, ***j*****Dd** et ~~***j*****dD**~~.

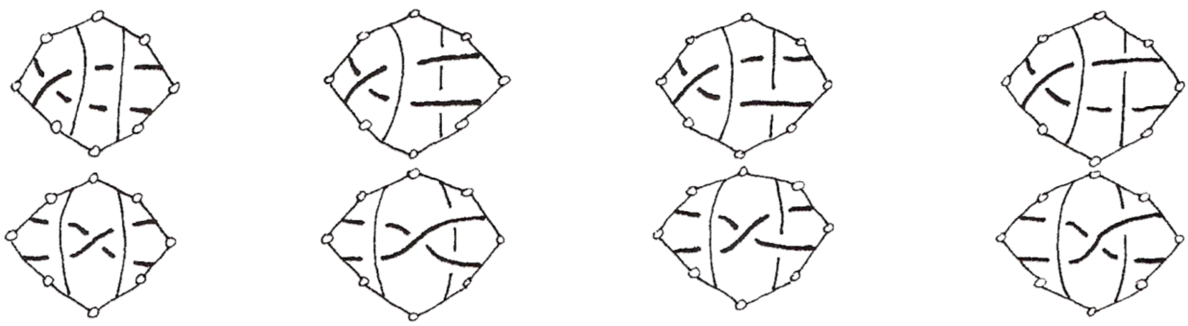


sur ces huit montages, deux fournissent un coin ~~coincé~~, les arbitrairement étiquetés ~~***i*****Dd**~~ et ~~***j*****dD**~~.

chaque montage peut ainsi être formalisé en partant du coin et aboutissant à la nouvelle épingle choisie selon l'écriture : le croisement ***x*** ∈ {***i***, ***j***} et les épingle ***é***, **é'** ∈ {***D***, ***d***, **Dd**, **dD**} forment le coin retournable ***x*** + ***é*** = ***xé***, à quoi s'ajoute la nouvelle épingle choisie (***x*** + ***é***) + **é'** = (***xé***) + **é'** = (***xé***)**é'**.

reprenons notre poinçon octogonal et effectuons le montage d'un coin retournable ***iD*** et d'une épingle, en essayant toutes les épingles et observons dans quel cas le coinçage peut apparaître.

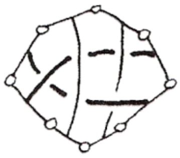
la première ligne de dessins correspond aux essais des quatre épingles montées avec le coin retournable, la seconde ligne de dessins correspond aux retournements qui fournissent la dynamique de propagation du soliton.

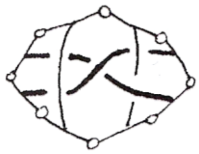


D ***d***

Dd **dD**

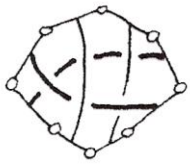
c'est le cas ***iD***+**Dd** qui n'est pas un ***soliton*** complet. le motif est dégéné-

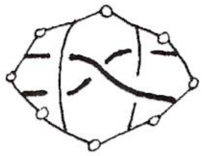


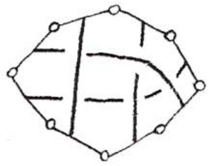


ré en oscillateur binaire.

cette épingle **Dd** est-elle toujours bloquante? changeons le croisement







du coin retournable ***iD***, par ***j***, le coin devenant ***jD***.

le motif obtenu est bien un ***soliton***. ce n'est donc pas l'épingle en tant que telle qui bloque mais le *coin la-tent qu'elle forme avec le croisement de départ*. or on sait qu'un croisement ***i*** est coincé par l'épingle **Dd**, et un croisement ***j*** par l'épingle **dD**. ces deux épingles sont *inverses*, homotopiquement, l'une de l'autre comme sont inverses les deux croisements ***i*** et ***j***, chacun effectuant un quart de tour par rapport à l'autre[1]. chaque croisement à l'origine ***informe*** donc l'épingle qui participera au montage du ***soliton***. la réciproque est aussi vraie. nous pouvons donc affirmer deux choses : d'une part **les épingles n'exercent aucune influence de près ou de loin les unes sur les autres**; d'autre part nous pouvons énoncer la règle suivante **aucune épingle, rapportée au croisement origine, ne doit passer *sur* le brin de *dessus* du croisement d'origine ni *sous* le brin du *dessous***, ce qu'on peut se remémorer sous la forme d'une ritournelle *ni s***U***r-d's***U***s ni s***OU***s-d's***OU***s*.

à quoi nous pouvons ajouter une observation intuitive mais dont un peu de pratique rend compte, c'est que les deux épingles non alternées sont

---

[1] en utilisant l'opérateur complexe **i** — à ne pas confondre, ici, avec l'écriture adoptée pour le croisement de même nom —, soit ***x*** un croisement, son inverse peut être noté **i*x***. de même nous pouvons concevoir un opérateur "homotopique" **א** (alef) tel que **אé** soit l'épingle inverse de **é**. les quatre coins seraient ainsi : ***x*é**, ***x*אé**, **i*x*é** et **i*x*אé**.

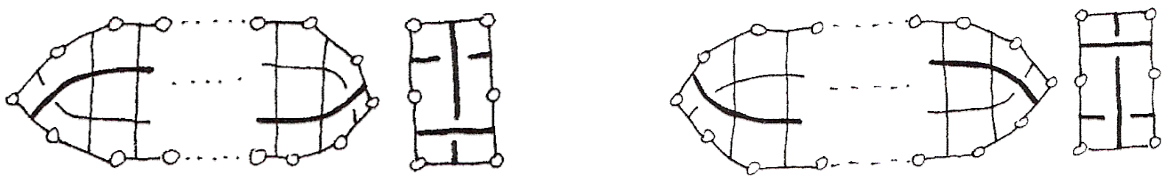
équivalentes pour le ***soliton***, et même neutres comme nous l'avons dit plus haut. nous pourrons donc parler seulement de l'épingle alternée ***O*** dont les ornures sont **h*O*mogènes**, $\boldsymbol{O} \in \{\mathbf{Dd}, \mathbf{dD}\}$, celle qui est compatible avec le croisement pour former un coin retournable, soit ***i*dD**, soit ***j*Dd**, et de l'épingle non alternée ***E***, dont les ornures sont **h*E*téro-gènes**, $\boldsymbol{E} \in \{\boldsymbol{D}, \boldsymbol{d}\}$, compatible avec les deux croisements. ceci réduit le nombre des montages à quatre.

nous pouvons donc maintenant aborder la formulation du ***soliton*** en tenant compte de toutes ces données.

schémas des *solitons*

les premières formes du ***soliton*** sont dessinées à partir d'un croisement de départ, identique à l'arrivée. il n'y a donc que quatre ***solitons***, le $\boldsymbol{i_n^O}$, le $\boldsymbol{i_n^E}$, le $\boldsymbol{j_n^O}$ et le $\boldsymbol{j_n^E}$, l'indice **n** donnant le nombre d'épingles de 1 à l'∞.

nous ne dessinons que deux schémas, un par croisement, connoté par sa portion de **brin Dessus en gras**, en faisant apparaître le croisement simultanément au départ et à l'arrivée – sans indiquer où est le départ,

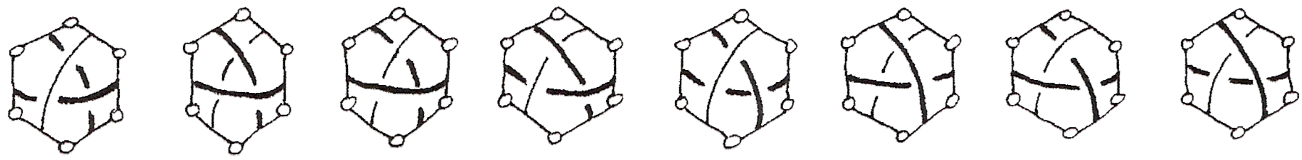


à lire donc dans les deux sens –,et en laissant les épingles dans l'ombre; schémas auxquels nous ajoutons, puisque à chacun des croisements s'associe son épingle antagoniste, l'épingle interdite[2], parce que ce sont les deux seules informations suffisantes pour considérer le montage comme un ***soliton***.

compatibilité et antagonisme

[2] il reviendrait au même de dessiner l'épingle permise!

effectuons les montages avec les quatre épingles mais **à gauche** des croisements, soit ***é*** + ***x***. nous obtenons les huit combinaisons – lues de gauche à droite – ***Di***, ***di***, **Dd*i*** et ~~**dD*i*,**~~ et ***Dj***, ***dj***, **Dd*j*** et ~~**dD*j***~~.



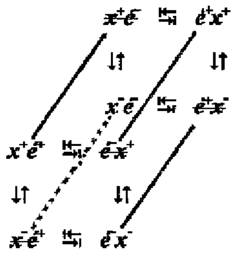
ces dessins nous montrent deux choses : **la première** c'est que les épingles non alternées restent compati-bles avec le retournement quelle que soit la situation. ces épingles apparaissent comme des éléments neutres dans le processus. en effet, comme elles sont *toujours* au-Dessus ou au-dessous, elles forment comme un gaine sans intervention directe avec les brins du croisement qui se propage. cette remarque nous permet de *ne nous intéresser qu'aux deux épingles alternées*. **la seconde** c'est que les épingles antagonistes **à droite** d'un croisement *ne le sont plus à gauche* et réciproquement. pour le dire autrement antagoniste et compatible en permutant échangent leur rôle. en gardant la même arbitraire étiquette des épingles **Dd** et **dD** nous avons en fait changé de situation : *à droite* de ***i***, par exemple, l'épingle **Dd** passe **sur** le brin de **D**essus et **sous** le brin de **d**essous mais *à gauche* l'épingle passe **sous** le brin de **D**essus et **sur** le brin de **d**essous ce qui renverse l'antagonisme et le transforme en compatibilité, et réciproquement, par changement de cadran du même lien de connexité. on peut formaliser la chose ainsi : soit ***é***$^+$ l'épingle compatible et ***é***$^-$ l'antagoniste, alors ***xé***$^+$ devient ***é***$^-$***x***, et réciproquement; similairement, nous avons ***xé***$^-$ devient ***é***$^+$***x***.

nous pouvons donc dire maintenant que pour **seize** montages de coins, quatre sont des coins non retourna-bles à la combinatoire d'écriture simple et visible : ~~***i*Dd**~~, ~~**dD*i***~~, ~~***j*dD**~~, ~~**Dd*j***~~. ce qui s'exprime :

– **commuter les lettres de l'étiquette de l'épingle,** *inverse* **le statut de l'épingle : d'antagoniste elle devient compatible et réciproquement;** par exemple ~~***i*Dd**~~ = ***ié***$^-$ devient ***i*dD** = ***ié***$^+$, etc.

– **commuter le croisement et l'épingle, inverse l'épingle et par conséquent inverse le statut du coin : de non retournable il devient retournable et réciproquement.** $\boldsymbol{x\acute{e}^-}$ devient $\boldsymbol{\acute{e}^+x}$.

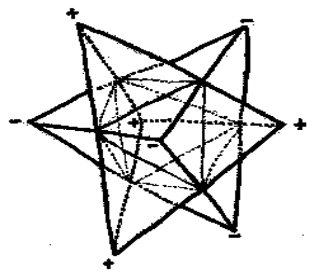
resserrons encore l'écriture : soient $\boldsymbol{x^+}$ et $\boldsymbol{x^-}$ les deux croisements inverses l'un de l'autre et $\boldsymbol{\acute{e}^+}$ et $\boldsymbol{\acute{e}^-}$ les deux épingles inverses l'une de l'autre. nous pouvons alors écrire le diagramme des coins dans lequel la compatibilité s'exprime par l'identité des signes {+, +}, {—, —}et où '**com**', '⇆', opérateur horizontal, signifie 'commutent' et '*inv*', '⇅', opérateur vertical, ainsi que *'**pol**'*, '⤢', opérateur diagonal, signifient 's'inversent', le premier pour les croisements et le second pour la **polarisation** des épingles :



nous disposons ainsi d'une petite algèbre des opérateurs du soliton. faisons $\mathbf{c}^{x}_{\acute{e}} = \boldsymbol{x^{\pm}\acute{e}^{\pm}}$. nous formons alors les identités suivantes, en prenant garde aux positions des indices α et β en hauteur ainsi qu'à leur rang latéral : $\mathbf{com}(\mathbf{c}^{\alpha}{}_{\alpha}) = \mathbf{com}\ (\boldsymbol{x^+\acute{e}^+}) = \boldsymbol{\acute{e}^-x^+} = \mathbf{c}_{\beta}{}^{\alpha} = inv(\boldsymbol{\acute{e}^-x^-}) = inv(\mathbf{c}_{\beta}{}^{\beta}) = \boldsymbol{pol}(\boldsymbol{\acute{e}^+x^+}) = \boldsymbol{pol}(\mathbf{c}_{\alpha}{}^{\alpha})$, etc.[3]

le diagramme se présente comme un cube; si nous assignons la valeur + aux coins à croisement et épingle compatibles, c'est-à-dire aux coins retournables, et la valeur – aux coins ~~coincés~~, et si l'on réunit les valeurs identiques par un trait, on observe que les liens de compatibilités forment deux tétraèdres, passant par les diagonales des faces du cube, et se pénétrant formant ainsi un octaèdre.

[3] on notera la similitude d'écriture avec l'écriture tensorielle.

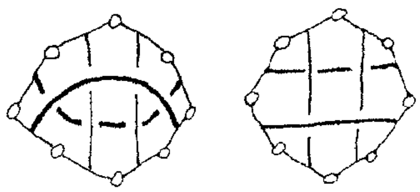


pour lequel, avec nos notations ci-dessus et en notant γ la relation de compatibilité, nous avons les identités $\gamma(\mathbf{c}^{\alpha}{}_{\alpha}) = \gamma(\mathbf{c}_{\beta}{}^{\alpha}) = -\gamma(\mathbf{c}_{\alpha}{}^{\alpha}) = -\gamma(\mathbf{c}^{\alpha}{}_{\beta})$.

diversité des *solitons*

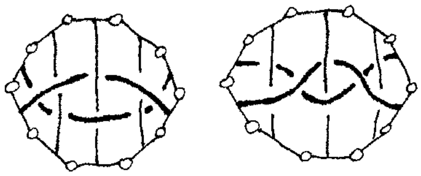
• ***polysolitons***

un ***polysoliton*** est un montage tel que plusieurs croisements se situent sur la même ligne de propagation. ce qui peut occasionner des collisions contribuant à la formation de torsades doubles, par exemple. si deux croisements sont différents, ***ij***, , ils forment une lunule latente annulable visible par le fait que les brins du couple de croisements sont toujours dessus pour l'un des brins toujours dessous pour l'autre. alors la propagation s'annule, crée une torsade nulle et les épingle sont inversées.



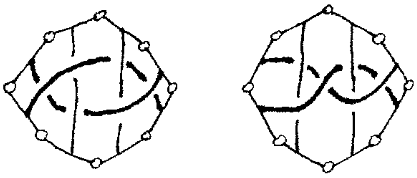
lunule annulable

la seule façon d'empêcher cette annulation consiste à ajouter une épingle inverse qui coincera les deux croisements et donc, de ce fait, bloquera la propagation des deux croisements au point de rencontre.

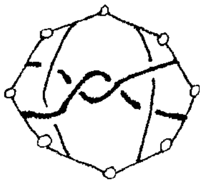


annulabilité empêchée

cette lunule sera rendue patente lorsque les deux croisements se rencontreront. chaque croisement de la lunule apportant son épingle compatible, celle-ci sera nécessairement antagoniste pour l'autre croisement, comme nous l'avons déjà remarqué au ***§ précédent***, ces épingles feront écrou, la lunule sera la limite de propagation des deux croisements. de ce fait découle qu'une lunule patente ne peut former un train d'onde.

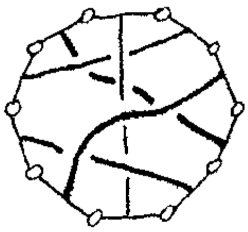


torsade double

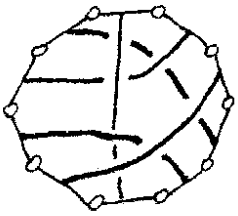


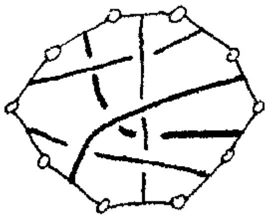
plurisoliton

un ***plurisoliton*** est un montage dans lequel entrent plusieurs motifs formant plusieurs voies de propagations, simultanées ou non. un cas par-

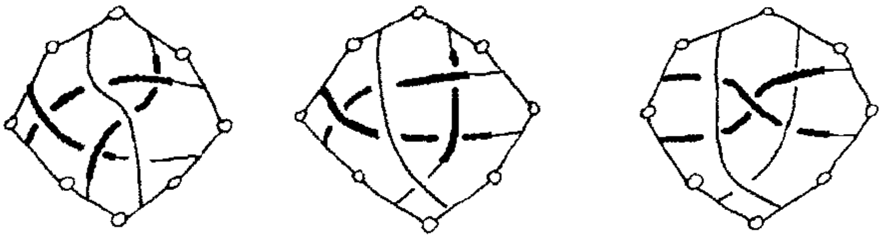


ticulièrement simple est le ***plurisoliton*** transversal où deux coins se propagent perpendiculairement l'un à l'autre.

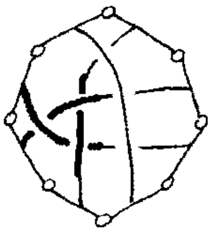




il peut apparaître dans certains cas un coin coincé qui sera rendu provisoirement retournable par le passage d'un croisement retournable,



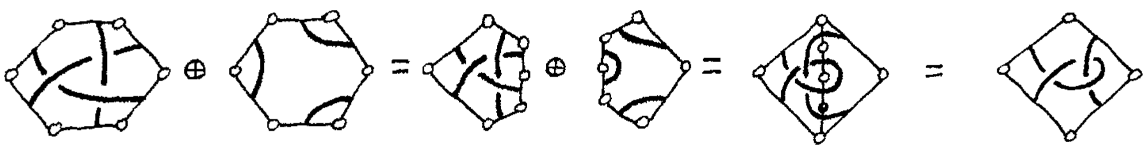
c’est-à-dire que la rencontre ouvrira la possibilité d'une propagation transversale limitée, car le croisement qui n'était pas retournable avant la collision, le redeviendra lorsque sa propagation rencontrera les pattes du croisement transversal.



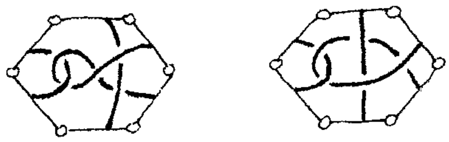
épingles barrières de potentiel

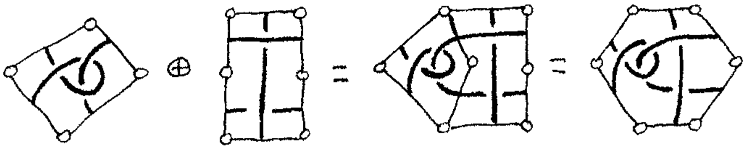
une épingle antagoniste fait fonction de barrière de potentiel infranchissable pour le croisement qui y a-boutit. hormis le cas du ***plurisoliton*** dans lequel un tel croisement est provisoirement rendu à la propagation, limitée rappelons-le, le coinçage reste le coinçage et une épingle antagoniste reste une barrière de potentiel infranchissable. un seul motif nœudien permet ce franchissement, la permutation nœudienne. voici une suite de dessins par lesquels nous effectuons un montage topologique montrant le fait.

nous ajoutons à un coin non retournable un poinçon dans lequel figurent trois torsades nulles.



nous ajoutons une épingle compatible et nous effectuons la permutation





le croisement peut se propager comme un ***soliton***. les dessins montrent qu'il a fallu former une lunule avec l'épingle antagoniste, épingle qui a été *absorbée* par la lunule. les trois croisements du coin initial sont devenus les trois croisements du motif de permutation. cette construction permet donc au croise-ment initial de se propager désormais. réécrivons l'ensemble des opérations.

a – nous avions un croisement ***i*** et une épingle *antagoniste* **Dd**, formant un coin coincé ***i*** + **Dd** = ~~***i*Dd**~~ (la barre exprimant le coinçage).

b – nous formons une lunule de telle sorte que le coin devienne un motif de permutation.

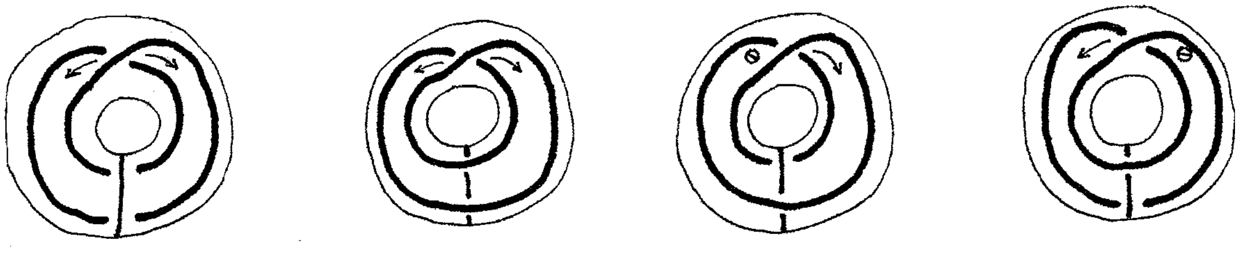
c – nous y adjoignons une épingle **dD,** inverse de l'antagoniste et nous effectuons la permutation.

d – le croisement initial se propage jusqu'à la nouvelle épingle, compatible celle-ci, avec laquelle il forme un nouveau coin retournable

solitons **circulaires**

toutes les réflexions précédentes peuvent être globalisées dans les solitons circulaires.

le plus simple est constitué d’une couronne géométrique, ou disque troué topologique, sur laquelle nous dessinons un croisement et une épingle, le croisement rabouté à lui-même, et l’épingle accrochée aux bords de la couronne dont nous lirons la polarité, **Dd** ou **dD**, à partir du trou central. la possibilité du retournement est marquée par une flèche et l’impossibilité par le signe '⊘'. nous appelons **dynamique** du soliton l’ensemble de ce marquage. comme il y a 4 épingles, nous dessinons les quatre cas.



épingles *E* épingles *O*

- *un croisement une épingle compatible*

sur un ***soliton*** d'épingle *O*, effectuons le retournement.

(a) (b)

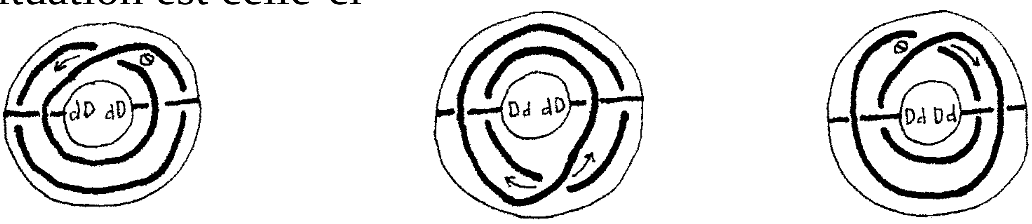
le croisement semble n'avoir pas changé, mais sa dynamique est inversée comme la polarité de l'épingle.

nous observons qu'il revient au même d'effectuer le retournement ou d'inverser la polarité de l'épingle *O* : de **Dd** elle passe à **dD** et inversement. nous pouvons donc dire que le soliton circulaire composé d'un seul coin retournable, c'est-à-dire d'un croisement et de son épingle compatible, se comporte à la fois comme un oscillateur binaire et comme un inverseur de polarité. en effet, circulairement parlant, l'épingle n'est compatible que d'un seul côté de son croisement. le retournement, comme l'inversion de polarité, inverse la dynamique du soliton et lui permet donc de repartir dans le sens opposé, comme un pendule sans arrêt.

à partir de cette situation, nous allons en observer d'autres de plus en plus riches en faisant varier le nombre des épingles, leurs polarités ainsi que leurs modes d'assemblages.

- *un croisement deux épingles compatibles*

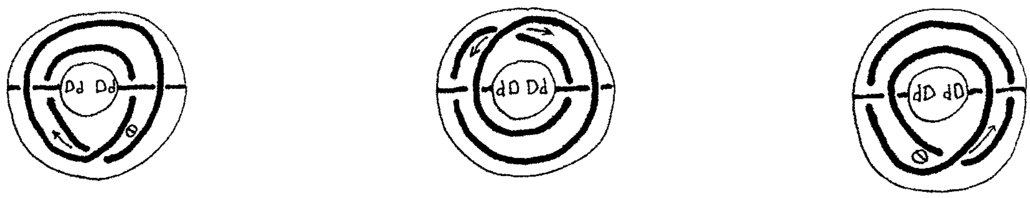
1 – la situation est celle-ci



(**b**) (**a**) (**b'**)

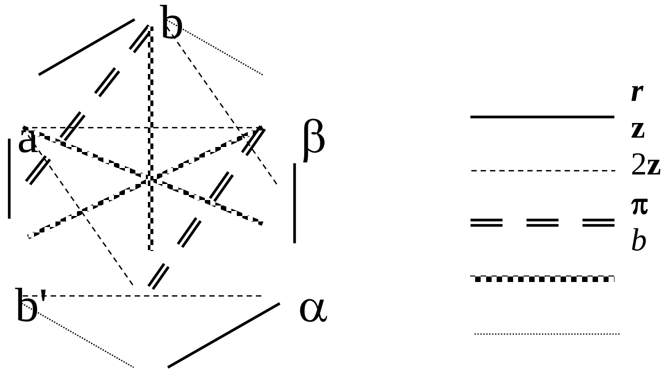
il apparaît un événement qu’on n’observait pas dans le cas précédent d’un croisement et d’une épingle compatible : les deux épingles séparent la couronne en deux zones qui vont recevoir chacune à leur tour le croisement. il ne peut donc plus s’agir d’équivaloir simplement le retournement à l’inversion de polarité. entre (**b**) et (**a**) il y a bien inversion de polarité d’une épingle mais apparaît de plus une rotation de 180° dans le plan de la feuille du croisement qui passe d’une zone à l’autre. de même entre (**a**) et (**b'**). à cela près, le système demeure un oscillateur à trois états. l’état (**a**) montre que les deux épingles sont inverses l’une de l’autre et par cela même offrent les deux orientations à la dynamique, alors que (**b**) et (**b'**) ont chacun leurs deux épingles identiques et une seule orientation dynamique. pour passer de l’un à l’autre il faut **deux** inversions de polarités.

2 – voyons ce que donne **une** inversion de polarité sur (**b**). la situation est celle-ci :



(β) (α) (β')

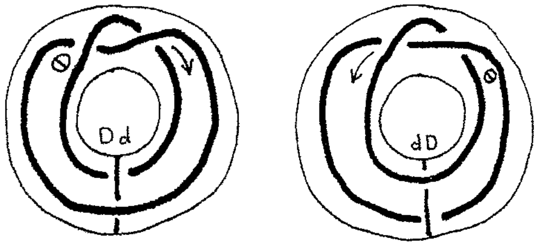
(α) et (**a**) sont réciproquement tournés d’un demi-tour, ainsi que (β) et (**b**), et (β') et (**b'**). les rapports des deux situations sont donnés par le graphe des rapports entre le retournement ***r***, le demi-tour dans le plan **π** et l’inversion de polarité **z** :



β'

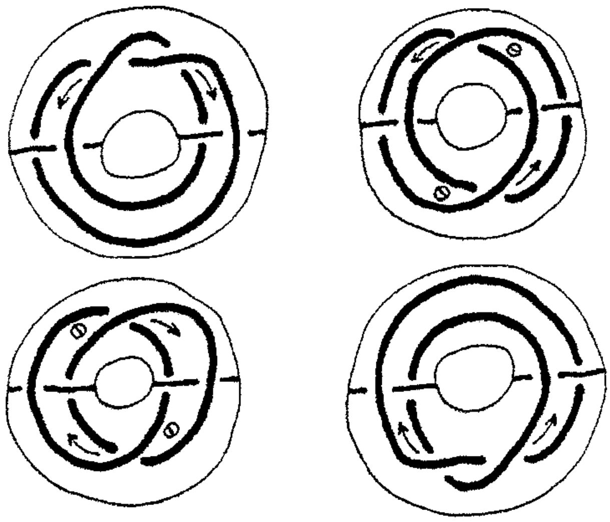
entre les états (**b**) et (β) ainsi que (**b'**) et (β') il apparaît de plus une bascule *b* hors du plan de la feuille, alors qu'entre (**a**) et (α) cette bascule se confond avec la rotation **π** dans le plan de la feuille.

deux croisements une épingle compatible

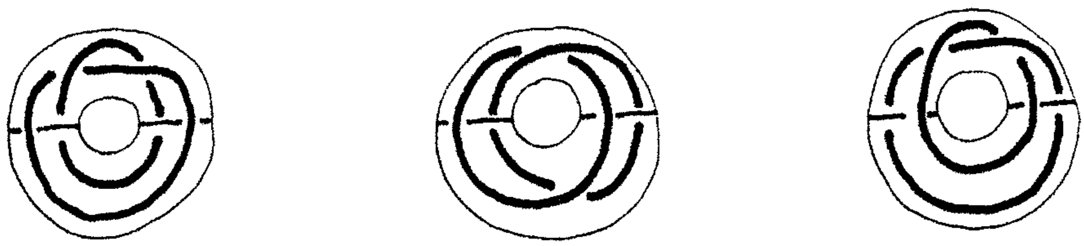


deux croisements deux épingles compatibles

le système est celui-ci :



deux croisements deux épingles une compatible



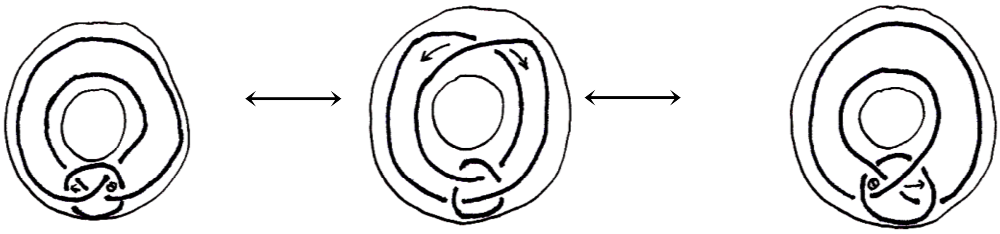
jusqu’à présent, les épingles n’étaient rattachées qu’aux bords de la couronne. les croisements raboutés à eux-mêmes formaient les seuls ronds du soliton circulaire. voyons ce qui se passe lorsque les épingles forment elles-mêmes un ou plusieurs ronds.

- ***solitons* circulaires constitués de ronds**

dans tous les cas précédents, seul le croisement rabouté à lui-même forme un rond. deux croisements forment deux ronds. de manière générale, comme pour les états-centres des nœuds, un nombre impair de croisements indique un rond, un nombre pair deux ronds. nous parlerons désormais de solitons circulaires à plusieurs ronds, au moins deux, un ou deux fourni·s par le·s croisement·s, les autres par les épingles.

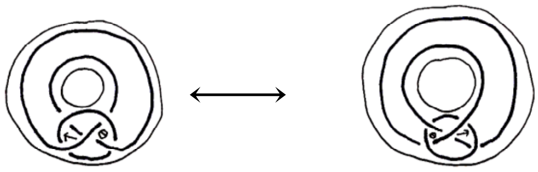
un croisement un rond compatible

le croisement rabouté à lui-même forme un rond. ce n’est pas de ce rond dont nous parlons quand nous disons **rond compatible**, nous réservons cette appellation au rond formé par l’épingle compatible raboutée à elle-même, que pour cela nous nommons provisoirement **rond-épingle**.
la situation est celle-ci :



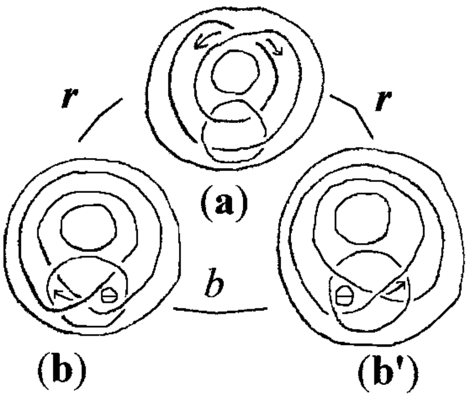
(**b**) (**a**) (**b'**)

cette situation ressemble à celle d’*un croisement deux épingles compatibles*. cependant en (**b**) et en (**b'**) un phénomène nouveau apparaît : le rond-épingle, du fait du retournement est devenu basculable, la bascule s’effectuant hors du plan de la feuille.



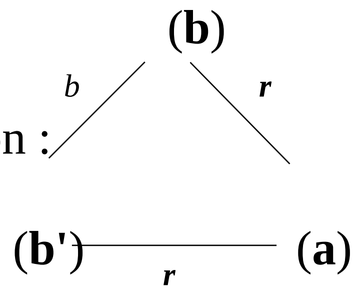
la bascule a changé la polarité du rond-épingle qui, du même coup, devient compatible et transmute l'état (**b**) en (**b'**) et réciproquement. la bascule de ce rond permet donc la transition d'un état bloqué en un état conducteur ce qui assure la permanence de la propagation du ***soliton***. pour cela, nous nommerons désormais le rond-épingle **rond-bascule**.

r = retournement
b = bascule



nous pouvons maintenant représenter le système ainsi :

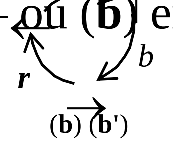
que nous simplifions en, avec rotation :



la propagation du ***soliton*** est ainsi rendue interminable dans les deux sens.

nous pouvons la décrire :

1 – retournement **r** de (**a**) en (**b**) — ou (**b'**)
2 – bascule *b* de (**b**) en (**b'**) — ou (**b'**) en (**b**)
3 – retournement **r** de (**b'**) en (**a**) — ou (**b**) en (**a**).



le soliton cesse d'être un oscillateur.

orientation des ronds-bascules, polarités

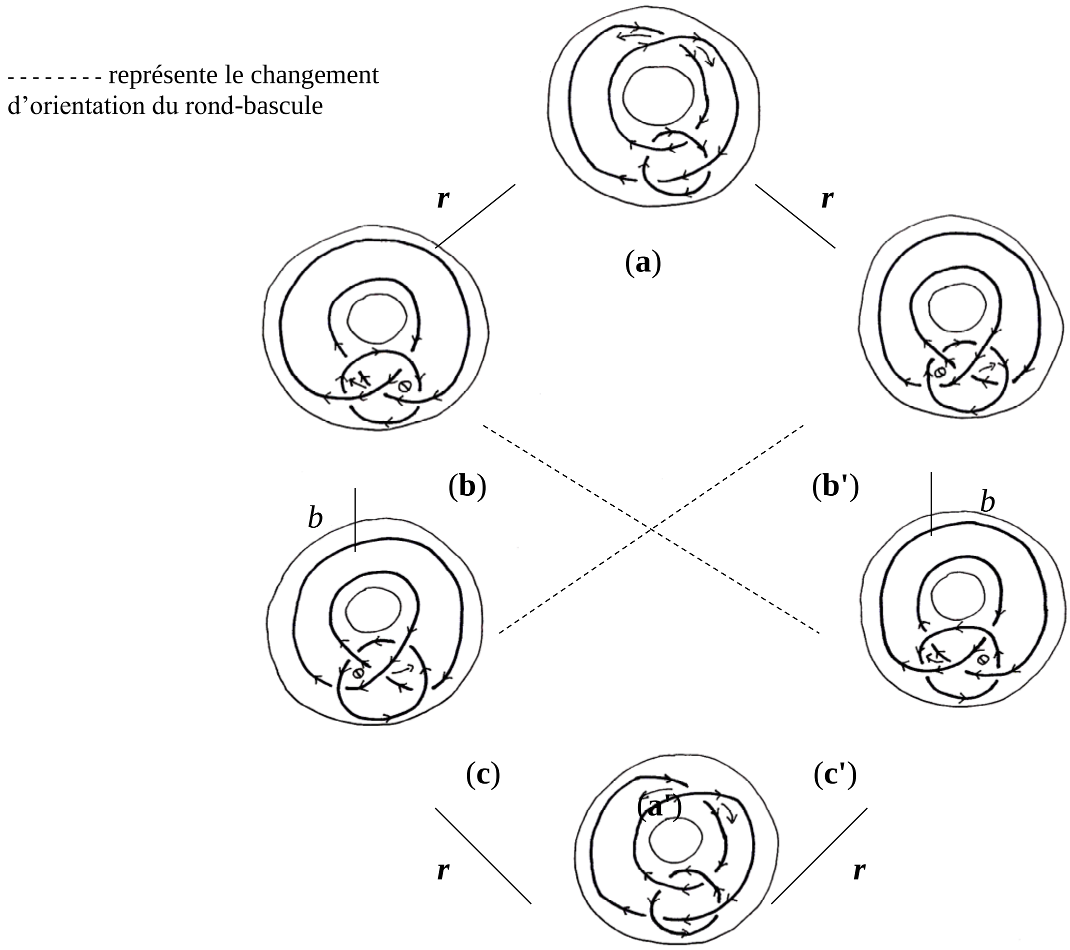
à ce stade de notre étude nous allons matérialiser les polarités en orientant les brins, c’est-à-dire en dessinant la flèche sur chaque élément du ***soliton*** afin de manifester ce qui reste invariant et ce qui varie. reprenons la situation précédente, les orientations étant arbitraires.

(**b**) (**a**) (**b’**)

nous observons que le retournement n’affecte pas les orientations. effectuons la bascule dans (**b**).

(**b**) (**c**)

l’orientation des ronds-bascules en (**c**) et (**b'**) est différente. en sachant qu’il en est ainsi entre (**b**) et (**c'**) issu de (**b'**), nous pouvons dessiner le système complet de la propagation avec les orientations.



chaque lectrice et chaque lecteur pourra donc envisager, comme en un jeu – à la manière du **jeu de la vie** de **conway** –, toutes les combinaisons, des plus simples aux plus compliquées, à plusieurs ronds, compatibles ou mixés, enlacés ou simplement empilés, avec plusieurs motifs en épingles, coins, etc., offrant des configurations nœudiennes luxuriantes propices à l'investigation icsografique.

annexes

*cinq premières séquences du **soliton** nœudien*

la représentation en graphes ornés